数理解析研究所講究録
447巻 1981年 17-31

種数3の曲線の方程式とmoduliについて

日大 理工 佐々木隆二

良く知られている様に、非特異平面4次曲線は、28本の複接線（bitangent）を持つ。 これらの接線の7本が、次の条件(A)を満たす時、その7本は、Aronhold system をなすと云われる。

(A) どの相異る3本の6個の接点が、2次曲線に含まれない。

我々は、次の集合を主な考察の対象とする。

$$\mathcal{M}^{(2)} = \left\{ (C, \phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} C\text{ は非特異平面4次曲線} \\ \phi : \{1, 2, \cdots, 7\} \xrightarrow{\sim} A \\ A\text{ は }C\text{ の1つの Aronhold system} \end{array} \right\} \Big/ \cong$$

我々の第1の目標は、moduli 空間 $\mathcal{M}^{(2)}$ を具体的に書き表わす事である（定理8）。次に、この事実を使って、次数3、level 2 の modular 函数体は、有理函数体である事を示す。さらに、その6個の生成元を具体的に与える。

これらの問題は、最初、Riemannにより研究され、Weber Frobeniusに至って完成された。然し乍ら、理解しにくい所もあるので（少くとも筆者にとり）少し整理して述べてみることにする。

§1 代数曲線の Theta characteristics

この節では、代数曲線の Theta characteristic の理論を、手短かに復習する（c.f.[5]）。

k を標数が 2 と異る代数閉体、C を k 上の種数 $g \geqslant 1$ の完備非特異代数曲線とする。C 上の invertible sheaf L が $L^2 \simeq \omega_C$ なるとき、L は half-canonical と呼ばれる。但し、ω_C は C 上の canonical invertible sheaf である。C 上の half-canonical invertible sheaf の全体を $T = T(C)$ と書くことにする。このとき次が成立する。

(i) $T \neq \phi$

(ii) $L \in T$ に対し、$f_L : J(C)_2 \longrightarrow T(C)$ を $x \longmapsto L \otimes \mathcal{O}(x)$ で定義すると、f_L は全単射である。特に $\mathrm{Card}\, T(C) = 2^{2g}$ である。ここで、$\mathcal{O}(x)$ は $(J(C) \ni) x$ に対応する invertible sheaf、$J(C)_2$ は $J(C)$ の 2 分点全体のなす群。

(iii) $e : T(C) \longrightarrow \{\pm 1\}$ を

$$e(L) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad h^0(C, L) \equiv 0 \mod 2 \\ -1 & \text{if} \quad h^0(C, L) \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

によって定義する。$T_{\pm} = \{L \in T(C) \mid e(L) = \pm 1\}$ とおくと $\mathrm{Card}\, T_{\pm} = 2^{g-1}(2^g \pm 1)$ である（複号同順）。T_+, T_- の元を夫々、even theta characteristic、odd theta characteristic と呼ぶ。

$T(C)$ の元 L_1, L_2, L_3 に対し $e(L_1, L_2, L_3) = e(L_1)\cdot e(L_2)\cdot e(L_3)\cdot e(L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \otimes \omega_C^{-1})$ と定義し、$e(L_1, L_2, L_3) = -1$ の時、$\{L_1, L_2, L_3\}$ は azygetic であるという。

§2　種数3の non-hyperelliptic 曲線の複接線

今後、C は、種数3の完備非特異曲線で non-hyperelliptic であるとする。一次系 $\Gamma(C, \omega_C)$ による $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\Gamma(C, \omega_C))$ への埋め込みの像と C とを同一視する。$\mathbb{P}^2$ の直線 l は、$l \cdot C = 2(P+Q)$ なる時、複接線と呼ばれる。

命題1　C の複接線全体と、$T(C)_-$ の間には自然な全単射がある。対応は、証明の中で示される。

証明、l を C の複接線とし、$l\cdot C = 2(P+Q)$ とする。$L = \mathcal{O}(P+Q)$ は half-canonical invertible sheaf で、$h^0(L) = 1$。故に $e(L) = -1$、即ち $L \in T_-$。逆も明白。

定義　$\{L_1, L_2, \cdots, L_7\} \subset T(C)_-$ は $e(L_i, L_j, L_k) = -1$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ の時、即ち、どの3つも azygetic の時、Aronhold system と呼ばれる。複接線についても、命題1により、同様に定義する。

次は容易に証明される。

補助定理 2　$L_1, L_2, L_3 \in T(C)_-$ のとき次は同値である。

(i) $\{L_1, L_2, L_3\}$ は azygetic である。

(ii) $L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \otimes \omega_C^{-1} \in T(C)_+$。 (ii)′ $h^0(L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \otimes \omega_C^{-1}) = 0$。

(iii) $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$ を含む 2 次曲線が存在しない。

但し $L_i \simeq \mathcal{O}(P_i + Q_i)$ $(i = 1, 2, 3)$。

§3　次数 2 の Del Pezzo 曲面と非特異平面 4 次曲線

$P_1, P_2, \cdots, P_7$ を $\mathbb{P}^2$ の 7 個の点とする。これらは射影的に独立であると仮定する、即ち、それらのどの 3 点も 1 つの直線にのらないし、かつどの 6 点も 1 つの 2 次曲線にはのらないとする。$\{P_1, P_2, \cdots, P_7\}$ を blow up して出来た曲面を X とする。これは良く知られた様に、次数 2 の Del Pezzo 曲面である。次の図を考える。

$$\begin{array}{ccccc} & & X \simeq \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(X, \omega_X^{-n})\right) & & \\ & \swarrow^{\pi} & & \searrow^{\varphi} & \\ \mathbb{P}^2 & & & & \mathbb{P}(\Gamma(X, \omega_X^{-1})) = \mathbb{P}^2 \end{array}$$

ここで、π は自然な birational morphism、ω_X は X の canonical invertible sheaf、φ は一次系 $\Gamma(X, \omega_X^{-1})$ に付随する morphism である。$C\ (\subset \mathbb{P}^2)$ を φ の branch locus とすると C は非特異 4 次曲線である。さらに $\Gamma = (\sigma)_0$

で $\varphi|_\Gamma : \Gamma \xrightarrow{\sim} C$ となる $\sigma \in \Gamma(X, \omega_X^{-2})$ が存在する。しかも $\varphi^{-1}(C) = 2\cdot\Gamma$ となる。$\pi^{-1}(P_i) = E_i$、P_i, P_j を通る直線の π による Proper transform を G_{ij} とおき、$\varphi(E_i) = l_i$ $\varphi(G_{ij}) = l_{ij}$ とする(cf [8])

命題3 (i) $\{l_1, \cdots, l_7, l_{12}, \cdots, l_{67}\}$ は C の複接線全体である。

(ii) $\{l_1, \cdots, l_7\}$ は C の複接線の Aronhold system である。言い換えれば、L_i を l_i に対応する half-canonical invertible sheaf とするとき、$\{L_1, \cdots, L_7\}$ は C の Aronhold system である。

証明。(i) については、[8] を参照のこと。

(ii) を証明する。$\mathcal{L}_i = \mathcal{O}(E_i) \otimes \mathcal{O}_\Gamma$ とおく。

$$0 \to \mathcal{O}(-\Gamma) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma \longrightarrow 0$$

なる exact sequence に $\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X$ を tensor し long exact sequence をとれば

$$\cdots \to H^0(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X) \to H^0(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_\Gamma^{-1})$$
$$\to H^1(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X^3) \to \cdots$$

を得る。ここで $\mathcal{O}_X(-\Gamma) \simeq \omega_X^2$、$\omega_\Gamma \simeq \omega_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_\Gamma$ 但し、ω_Γ は Γ の canonical invertible sheaf であることに注意しておく。さて、$H^0(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X) = H^1(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_X^3) = \{0\}$ がわかる。従って $h^0(\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \otimes \omega_\Gamma^{-1}) = 0$ を得る。

即ち $h^0(L_i\otimes L_j\otimes L_k\otimes\omega_C^{-1})=0$ となり、補助定理2により、$\{L_i, L_j, L_k\}$ は azygetic であることがわかる。　証終。

命題4　自然な写像 $\Gamma(X,\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))\otimes\Gamma(X,\omega_X^{-1})\longrightarrow\Gamma(X,\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\otimes\omega_X^{-1})$ は全射である。

証明。Generalized lemma of Castelnuovo ([9]) により $h^1(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\otimes\omega_X)=h^2(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\otimes\omega_X^2)=0$ をえれば良い。$\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)=\mathcal{L}$ とおく。$\mathcal{L}\otimes\omega_X$, $\mathcal{L}^{-1}$ は共に effective ではない。従って、$h^0(\mathcal{L}\otimes\omega_X)=0$、$(H^2(\mathcal{L}\otimes\omega_X))^\vee\simeq H^0(\mathcal{L}^{-1})=\{0\}$ (Serre duality)。一方 Riemann-Roch の定理により、

$$h^0(\mathcal{L}\otimes\omega_X)=\frac{1}{2}(\mathcal{L}\otimes\omega_X)\cdot(\mathcal{L}\otimes\omega_X\otimes\omega_X^{-1})+1+h^1(\mathcal{L}\otimes\omega_X)+h^2(\mathcal{L}\otimes\omega_X)$$

を得、従って、$h^0(\mathcal{L}\otimes\omega_X)=h^1(\mathcal{L}\otimes\omega_X)=0$ を得る。また、$\mathcal{L}^{-1}\otimes\omega_X^{-1}$ も effective でないことが容易にわかる。従って $H^2(\mathcal{L}\otimes\omega_X^2)\simeq(H^0(\mathcal{L}^{-1}\otimes\omega_X^{-1}))^\vee=\{0\}$ を得る。　証終。

次は容易であるか、又は良く知られている。

補助定理5　$h^0(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))=3$、$h^0(\omega_X^{-1})=3$

$$h^0(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\otimes\omega_X^{-1})=8\ 。$$

次に下記の可換図を考える:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))\otimes\Gamma(\omega_X^{-1}) \arrow[r] & \Gamma(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\otimes\omega_X^{-1}) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \Gamma(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) \\
\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))\otimes V \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[u, "s"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k))
\end{tikzcd}$$

但し、$V=\{F\in\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))\mid F$ は P_i $(1\leqq i\leqq 7)$ を1位の零点として持つ$\}$、$W=\{F\in\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4))\mid F$ は P_i $(1\leqq i\leqq 7)$ を1位の零点としてもつ$\}$ である。$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ の basis を u_1, u_2, u_3 とし、自明でない、$\mathrm{Ker}\, f$ の元(これは、命題4と補助定理5により定数倍を除いて一意的)を

$$u_1\otimes F_1 + u_2\otimes F_2 + u_3\otimes F_3$$

とおく。このとき次が成立する。

命題6 (Frobenius [3]) F_1, F_2, F_3 は V の basis をなす。

証明。$a_1F_1+a_2F_2+a_3F_3=0$ $(a_1\neq 0, a_2, a_3\in k)$ とする。一方 $u_1F_1+u_2F_2+u_3F_3=0$ である。従って、

$$\frac{F_1}{\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}}=\frac{F_2}{\begin{vmatrix}u_3 & u_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix}}=\frac{F_3}{\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}}=G$$

とおくと、G は u_1, u_2, u_3 に関する斉次2次式である。このとき、$F_i\in V$ 故 G は $\{P_1,\cdots,P_7\}$ のうち少なくとも6点を通らなければならない。これは $\{P_1,\cdots,P_7\}$ が射影的独立であることに反する。　証終。

定理7　$l_1, l_2, \cdots, l_7$ を $\mathbb{P}^2$ の7本の直線で、対応する、双対空間の点 $l_1^\vee, l_2^\vee, \cdots, l_7^\vee$ が $(\mathbb{P}^2)^\vee$ の中で、射影的に独立であるとする。このとき、$\{l_1,\cdots,l_7\}$ を Aronhold system としてもつ、非特異4次曲線 $C\subset\mathbb{P}^2$ が存在する。

証明. $(\mathbb{P}^2)^\vee$ を $\{l_1^\vee, \cdots, l_7^\vee\}$ に沿って blow up した空間を X とかき、$\pi : X \longrightarrow (\mathbb{P}^2)^\vee$ を自然な写像とする。u_1, u_2, u_3 を $(\mathbb{P}^2)^\vee$ の斉次座標とする。命題 6 により、$l_1^\vee, \cdots, l_7^\vee$ を1位の零点としてもつ、1次独立な、u_1, u_2, u_3 の3次式 F_1, F_2, F_3 が存在することがわかる。$h : (\mathbb{P}^2)^\vee \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を $h(a) = (F_1(a) : F_2(a) : F_3(a))$、$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を $\varphi(b) = (f_1(a) : f_2(a) : f_3(a))$ によって定義する。但し、$f_1, f_2, f_3 \in \Gamma(X, \omega_X^{-1})$ は F_1, F_2, F_3 に対応する section である。すると次の可換図を得る：

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
(\mathbb{P}^2)^\vee \arrow[rr, "h"'] & & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

このとき、$h(l_i^\vee) = \varphi(\pi^{-1}(l_i^\vee))$ は、直線 l_i そのもので、φ の branch locus を C とおけば、命題 3 により、C が求めるものであることがわかる。　　証終

$C \subset \mathbb{P}^2$ を非特異4次曲線とし、$\{l_1, \cdots, l_7\}$ を C の複接線の Aronhold system とする。このとき、$l_1^\vee, \cdots, l_7^\vee \in (\mathbb{P}^2)^\vee$ は射影的に独立であり、C の定義方程式は、次の様にして得られる。$\mathbb{P}^2$ の斉次座標を X_1, X_2, X_3 とし、l_1, l_2, l_3, l_4 は夫々 $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$ としてよい。

$${}^t(l_5, l_6, l_7) = (a_{ij})\,{}^t(X_1, X_2, X_3)$$

とおき、次の連立方程式

$$Y_1+Y_2+Y_3+X_1+X_2+X_3=0$$
$$\frac{Y_1}{a_{11}}+\frac{Y_2}{a_{12}}+\frac{Y_3}{a_{13}}+a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3=0$$
$$\frac{Y_1}{a_{21}}+\frac{Y_2}{a_{22}}+\frac{Y_3}{a_{23}}+a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3=0$$
$$\frac{Y_1}{a_{31}}+\frac{Y_2}{a_{32}}+\frac{Y_3}{a_{33}}+a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3=0$$

を考える。この方程式の解を Y_1, Y_2, Y_3（Y_i は X_1, X_2, X_3 の1次式）とした時、C は $\sqrt{Y_1X_1}+\sqrt{Y_2X_2}+\sqrt{Y_3X_3}=0$、即ち

(*) $(Y_1X_1)^2+(Y_2X_2)^2+(Y_3X_3)^2-2Y_1Y_2X_1X_2-2Y_2Y_3X_2X_3-2Y_3Y_1X_3X_1=0$. で与えられる。(cf [1]) 上記定理7は、(a_{ij}) がどの様な条件の下で、(*) で与えられる4次曲線が非特異であるかを云っている。さらに、命題3を考慮に入れれば、C の他の21本の複接線も $\{a_{ij}\}$ により（implicit にではあるが）有理的に表わされることもわかる。これらの具体的表示については、[1], ch XIII を参照されたい。以上をまとめると、次の定理を得る。

定理8

$$\mathfrak{M}^{(2)}=\left\{(C,\phi)\ \middle|\ \begin{array}{l}C:\text{種数3の non-hyperelliptic な非特異}\\ \text{完備代数曲線、}\phi:\{1,2,\cdots,7\}\xrightarrow{\sim}A,\\ A\text{ は }C\text{ の1つの Aronhold system}\end{array}\right\}\Big/\cong$$

$$\xrightarrow{\sim}\left\{(P_1,\cdots,P_7)\ \middle|\ \in(\mathbb{P}^2)^7,\ \text{射影的に独立}\right\}\Big/PGL(3,k)$$

$\mathbb{A}^6$ の座標函数を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6$ とし

$$\mu_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{vmatrix} \quad \mu_2 = \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_5 \\ \lambda_4 & \lambda_6 \end{vmatrix} \quad \mu_3 = \begin{vmatrix} \lambda_5 & \lambda_1 \\ \lambda_6 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$\mu_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_5 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mu_5 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mu_6 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_3 & \lambda_5 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mu_7 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_5 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_6 & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\nu_i = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 1 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & 1 & \lambda_3\cdot\lambda_4 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_5^2 & \lambda_6^2 & 1 & \lambda_5\cdot\lambda_6 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix} \quad (i\text{ 行目を除く}) \qquad 1 \leqq i \leqq 7$$

とおく。すると $\mathcal{M}^{(2)} \simeq \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6) \in \mathbb{A}^6 \mid \lambda_i \neq 0,$ $\lambda_i \neq \lambda_j,\ \mu_i \neq 0,\ \nu_i \neq 0\}$ を得る。従って $\mathcal{M}^{(2)}$ は、affine variety で、その座標環は、

$$k\left[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6, \frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_6}, \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_5-\lambda_6}, \frac{1}{\mu_1}, \cdots, \frac{1}{\mu_7}, \frac{1}{\nu_1}, \cdots, \frac{1}{\nu_7}\right]$$

で与えられる。

証明。前半は既に知っている。後半の同型について：P_1, P_2, P_3, P_4 を夫々 $(1.0.0), (0.1.0), (0.0.1), (1,1,1)$ と normalize すれば、射影的独立性が上記の様に表わされる。

§4 modular variety $\mathcal{M}^{(2)}$ と $\mathfrak{S}_3/\Gamma_3(2)$ との関係。

この節では基礎体を、複素数体 $\mathbb{C}$ にとる。C を種数 g の完

備非特異代数曲線とする。$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{2g}\}$ を canonical homology basis、$dw_1, \cdots, dw_g$ をそれに関して正規化された才1種微分の空間の basis とする。そのとき $\left(\int_{\gamma_j} dw_i\right) = (1_g, \tau)$ なる形になる。ここで τ は g 次の Siegel 空间 $\mathfrak{S}_g$ の点である。$\alpha = \begin{pmatrix}\alpha' \\ \alpha''\end{pmatrix} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g}$ （$\alpha', \alpha'' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$）に対し、

$$\theta[\alpha](\tau|z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^g} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}{}^t(\alpha'+p)\tau(\alpha'+p) + {}^t(\alpha'+p)(z+\alpha'')\right)$$

と定義する。但し $z \in \mathbb{C}^g$, $\mathbf{e}(*) = e^{2\pi i *}$ である。また $e(\alpha) = \mathbf{e}(2{}^t\alpha'\alpha'')$ と定義する。$e(\alpha) = 1$（或 -1）となるに従って $\theta[\alpha](\tau|z)$ が z の函数として、偶（或 奇）函数となる。さらに $e(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = e(\alpha_1)e(\alpha_2)e(\alpha_3)e(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ と定義する。

$Sp_g(\mathbb{Z}) = \Gamma_g$ とし、$\Gamma_g(2) = \{\sigma \in Sp_g(\mathbb{Z}) \mid \sigma - 1_{2g} \equiv 0 \mod 2\}$ とおく。$Sp_g(\mathbb{Z})$ の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ に対し、$\tau \longmapsto \sigma\cdot\tau = (a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$ は、$\mathfrak{S}_g$ の biholomorphic automorphism である。

以下、C は non-hyperelliptic curve でかつ $g=3$ とする。$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_7 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^6$ を Aronhold system 即ち、$e(\alpha_i) = -1$, $e(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) = -1$ とする。このとき

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\theta[\alpha_i](\tau|0)}{\partial z_j}\, dw_j = \omega_i \quad (1 \leqq i \leqq 7)$$

とおく。すると、次を満す、2次の positive divisor $\mathfrak{a}_i$, $1 \leqq i \leqq 7$, が存在する：$(\omega_i)_0 = 2\mathfrak{a}_i$, $e(\alpha_i) = e(\mathcal{O}(\mathfrak{a}_i))$,

$e(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) = e(\mathcal{O}(\pi_i), \mathcal{O}(\pi_j), \mathcal{O}(\pi_k))$。従って、$\{\mathcal{O}(\pi_1), \cdots, \mathcal{O}(\pi_7)\}$ は、C の half-canonical invertible sheaves の Aronhold system をなす。(cf [2], ch I)

$$D_j\theta_i = \left.\frac{\partial\theta[\alpha_i](\tau|z)}{\partial z_j}\right|_{z=0}$$

と書き、$(i) = {}^t(D_1\theta_i, D_2\theta_i, D_3\theta_i)$、$[i, j, k] = \det\begin{pmatrix} D_1\theta_i & D_1\theta_j & D_1\theta_k \\ D_2\theta_i & D_2\theta_j & D_2\theta_k \\ D_3\theta_i & D_3\theta_j & D_3\theta_k \end{pmatrix}$ とおく。

$U = \{(P_1, \cdots, P_7) \in (\mathbb{P}^2)^7 \mid$ 射影的独立$\}$ の元 $(P_1, \cdots, P_7)$ に対し、次を満す $\sigma \in PGL(3)$ が、一意的に存在する：

$$\sigma(P_1, \cdots, P_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Φ_2 を $(P_1, \cdots, P_7) \longmapsto (\lambda_1, \cdots, \lambda_6) \in \mathbb{A}^6$ によって定義すると、$\Phi_2(U)$ は、定理8で得られた、$\mathbb{A}^6$ の affine 開集合である。それを $M^{(2)}$ と書く。$\mathfrak{S}_3^\circ = \{\tau \in \mathfrak{S}_3 \mid \mathbb{C}^3/(1_3, \tau)\mathbb{Z}^6$ は non-hyperelliptic curve の Jacobian variety$\}$ とし、

$\Phi_1 : \mathfrak{S}_3^\circ \longrightarrow U$ を $\Phi_1(\tau) = ((1), (2), \cdots, (7))$ で定義する。

この時、$\Phi_2(\Phi_1(\tau)) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_6)$ は次の様に与えられる：

$$\lambda_1 = \frac{[5,2,3][1,2,4]}{[4,2,3][1,2,5]} \quad \lambda_2 = \frac{[1,5,3][1,2,4]}{[1,4,3][1,2,5]} \quad \lambda_3 = \frac{[6,2,3][1,2,4]}{[4,2,3][1,2,5]}$$

$$\lambda_4 = \frac{[1,6,3][1,2,4]}{[1,4,3][1,2,6]} \quad \lambda_5 = \frac{[7,2,3][1,2,4]}{[4,2,3][1,2,7]} \quad \lambda_6 = \frac{[1,7,3][1,2,4]}{[1,4,3][1,2,7]}\text{。}$$

$\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1 : \mathfrak{S}_3^\circ \longrightarrow M^{(2)}$ とおくと、次を得る。

定理9　Φは、次の様に分解し：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}_3^\circ \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M^{(2)} \\ & \mathfrak{S}_3^\circ/\Gamma_3(2) \arrow[ur, "\tilde{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

、

$\tilde{\Phi}$は同型写像である。ここで、πは自然な全射である。

証明、まず前半部を証明する。$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_3(2)$、$m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^6$とする。$\sigma \circ m = {}^t\sigma^{-1} m + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (c^t d)_0 \\ (a^t b)_0 \end{pmatrix}$と定義する。但し$(c^t d)_0$, $(a^t b)_0$は対角成分を3次の縦ベクトルとしたもの。このとき、theta函数の変換公式により

$$\begin{pmatrix} D_1\theta[\sigma\circ m](\sigma\cdot\tau|0) \\ D_2\theta[\sigma\circ m](\sigma\cdot\tau|0) \\ D_3\theta[\sigma\circ m](\sigma\cdot\tau|0) \end{pmatrix} = \gamma\cdot(c\tau+d)\begin{pmatrix} D_1\theta[m](\tau|0) \\ D_2\theta[m](\tau|0) \\ D_3\theta[m](\tau|0) \end{pmatrix}.$$

を得る。但しγは零でない定数である。一方$\sigma \in \Gamma_3(2)$故

$$\theta[\sigma\circ m](\sigma\cdot\tau|z) = \mathbf{e}\left(\frac{1}{4}{}^t m'(a-1_3)m''\right)\theta[m](\sigma\cdot\tau|z)$$

をうる。従って、次をみたす、零でない定数γ'が存在する：

$$\begin{pmatrix} D_1\theta[m](\sigma\cdot\tau|0) \\ D_2\theta[m](\sigma\cdot\tau|0) \\ D_3\theta[m](\sigma\cdot\tau|0) \end{pmatrix} = \gamma'\cdot(c\tau+d)\begin{pmatrix} D_1\theta[m](\tau|0) \\ D_2\theta[m](\tau|0) \\ D_3\theta[m](\tau|0) \end{pmatrix}.$$

故に、$\Phi_1(\sigma\cdot\tau) = (c\tau+d)\Phi_2(\tau)$、従って、$\Phi_2(\Phi_1(\sigma\cdot\tau)) = \Phi_2(\Phi_1(\tau))$がわかる。

次に後半を証明する。$\tilde{\Phi}$が全射であることは、定理7によってわかる。さて、$\Phi(\tau_1) = \Phi(\tau_2)$ $(\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_3^\circ)$とする。$C_i$を$\tau_i$に対応する曲線とする。このとき、$C_i$の canonical homology basis $\{\gamma_1^{(i)}, \cdots, \gamma_6^{(i)}\}$で、それに関する正規化された、第1種

微分の空間の basis $dw_1^{(i)}, dw_2^{(i)}, dw_3^{(i)}$ に対し

$$\left(\int_{\gamma_j^{(i)}} dw_k^{(i)}\right)_{\substack{1\le j\le 6\\ 1\le k\le 3}} = (1_3,\ \tau_i) \qquad (i=1,2)$$

となるものが存在する。さて、$\Phi(\tau_1)=\Phi(\tau_2)$ 故

$$M\begin{pmatrix}D_1\theta_i(\tau_1)\\ D_2\theta_i(\tau_1)\\ D_3\theta_i(\tau_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D_1\theta_i(\tau_2)\\ D_2\theta_i(\tau_2)\\ D_3\theta_i(\tau_3)\end{pmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots,7)$$

なる、$M\in PGL(3,\mathbb{C})$ が存在する。$\phi_i : C_i \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を $P \longmapsto {}^t(dw_1^{(i)}(P),\ dw_2^{(i)}(P),\ dw_3^{(i)}(P))$ によって定義すれば、

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{P}^2 \arrow[d] \\ C_2 \arrow[r, "\phi_2"'] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

を可換にする、同型 $f: C_1 \longrightarrow C_2$ が存在する。故に Γ_3 の元 $\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}$ で $\sigma\circ\tau_1=\tau_2$、$M=(c\tau_1+d)$ なるものがある。従って ${}^t(D_1\theta[\sigma\cdot\alpha_i](\tau_2),\ D_2\theta[\sigma\cdot\alpha_i](\tau_2),\ D_2\theta[\sigma\cdot\alpha_i](\tau_2)) =$ non zero const $\times\ {}^t(D_1\theta[\alpha_i](\tau_2),\ D_2\theta[\alpha_i](\tau_2),\ D_3\theta[\alpha_i](\tau_2))$ となり、

$$\sigma\cdot\alpha_i \equiv \alpha_i \mod 1 \qquad (i=1,2,\cdots,7)$$

このことから、$\sigma\in\Gamma_3(2)$ が解る。従って Φ は全単射である。Zariski 主定理により、Φ は同型写像であることがわかる。

証終

$\mathfrak{S}_3^\circ/\Gamma_3(2)$ は $\mathfrak{S}_3/\Gamma_3(2)$ の Zariski open subvariety 故、

$\mathfrak{S}_3/\Gamma_3(2)$ は有理多様体で、その函数体は $\mathbb{C}(\lambda_1,\cdots,\lambda_6)$ で与えられる。

参考文献

[1] H. F. Baker, Abelian Functions, Cambridge, (1897).

[2] J. D. Fay, Theta Functions on Riemann Surfaces, Springer Lecture Note 352 (1973).

[3] G. Frobenius, Über die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebener Curven vierter Ordnung, Jour. für Math., 99 (1886), 275-314.

[4] J. Igusa, Theta functions, Springer (1972).

[5] D. Mumford, Theta characteristics of an algebraic curves, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4 (1971), 181-192.

[6] B. Riemann, Gesam. math. Werke; Dover Edition (1953).

[7] H. Weber, Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin (1876).

[8] M. Demazure, Surfaces de Del Pezzo I. II. III. IV. V in Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Springer Lecture Note 777 (1980).

[9] D. Mumford, Varieties defined by quadratic equations, Questions on alg. varieties, Corsi dal C.I.M.E., Roma, 1969.